第10講　加法定理

PART1　加法定理

例題

(1)　α は第1象限の角, β は第2象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$ のとき, 次の値を求めよ。

(i)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(ii)　$\cos(\alpha-\beta)$　　(iii)　$\tan(\alpha+\beta)$

(2)　2直線 $y=2x$, $y=-3x$ のなす角 θ を求めよ。ただし, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

Point Pickup

練習

(1) α は第 2 象限の角，β は第 3 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(i) $\sin(\alpha-\beta)$　　(ii) $\cos(\alpha+\beta)$

(2) 2 直線 $y=(2+\sqrt{3})x$，$y=-x$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

第10講　PART1 確認問題

1　α は第 1 象限の角，β は第 4 象限の角であるとする。

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

2　α は第 1 象限の角，β は第 4 象限の角であるとする。

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

3　2 直線 $y=5x$，$y=-\dfrac{3}{2}x$ のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$$

第 10 講　加法定理

PART1　加法定理

例題

(1)　α は第 1 象限の角，β は第 2 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$ のとき，次の値を求めよ。

(i)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(ii)　$\cos(\alpha-\beta)$　　(iii)　$\tan(\alpha+\beta)$

(2)　2 直線 $y=2x$，$y=-3x$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　α は第 1 象限の角であるから　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4}$

β は第 2 象限の角であるから　$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$，$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\dfrac{12}{5}$

(i)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{12}{13}=\dfrac{33}{65}$

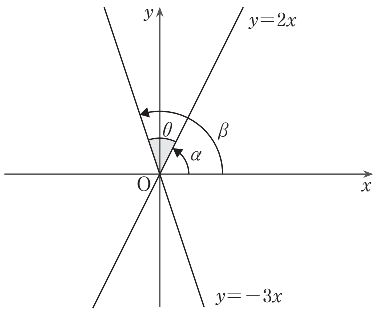
(ii)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{12}{13}=\dfrac{16}{65}$

(iii)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{3}{4}-\dfrac{12}{5}}{1-\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{12}{5}\right)}=\dfrac{15-48}{20+36}=-\dfrac{33}{56}$

(2)　2 直線 $y=2x$，$y=-3x$ と x 軸の正の向きがなす角をそれぞれ α，β とすると　$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=-3$

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}$$

$$=\frac{-5}{-5}=1$$



$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

練習

(1)　α は第 2 象限の角, β は第 3 象限の角であるとする。$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(i)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(ii)　$\cos(\alpha+\beta)$

(2)　2 直線 $y=(2+\sqrt{3})x$，$y=-x$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　α は第 2 象限の角であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

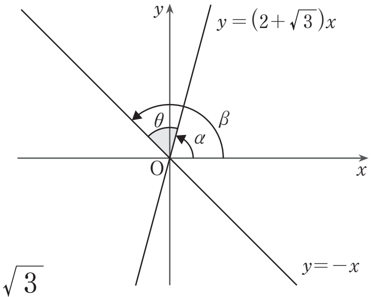
β は第 3 象限の角であるから　$\sin\beta<0$

よって　$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

(i)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$

(ii)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=1$

(2)　2 直線 $y=(2+\sqrt{3})x$，$y=-x$ と x 軸の正の向きがなす角をそれぞれ α，β とすると　$\tan\alpha=2+\sqrt{3}$，$\tan\beta=-1$



$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{-1-(2+\sqrt{3})}{1+(-1)\cdot(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-3-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{-(1+\sqrt{3})}=\sqrt{3}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

第10講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：5，ウ：5

[解説]

α は第 1 象限の角であるから　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

β は第 4 象限の角であるから　$\sin\beta<0$

よって　$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

したがって

$$\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$ [A]

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

[A]　正弦の加法定理
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

2 **[正解]** エオ：11，カ：5，キク：25

[解説]

$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=-\frac{3}{5}$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ [B]

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{11\sqrt{5}}{25}}$$

[B]　余弦の加法定理
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

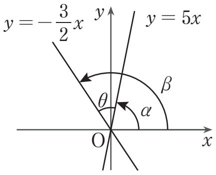
3 [正解] ケ：4

[解説]

2 直線 $y=5x$，$y=-\frac{3}{2}x$ と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とすると

$$\tan\alpha=5,\ \tan\beta=-\frac{3}{2}$$ [C]

右図より，2 直線 $y=5x$，$y=-\frac{3}{2}x$ のなす角 θ は



$$\theta=\beta-\alpha$$

よって

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$ [D]

$$=\frac{-\frac{3}{2}-5}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 5}$$

$$=\frac{-3-10}{2-15}=1$$

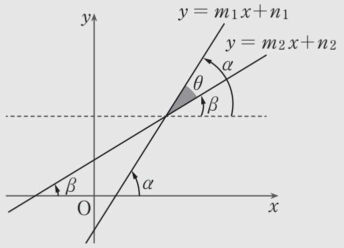
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

[C]　直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると
直線の傾き $m=\tan\theta$

[D]　2 直線のなす角
2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とし，2 直線が垂直でないとき 2 直線のなす角を θ とすると

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$